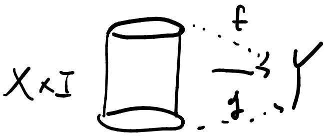
2. Homotopies et groupe fondamentale

1. Homotopies : On veut formaliser l'idée qu'un espace peut être "déformé" vers un autre. $\triangle \sim \square \sim \bigcirc$

Def : Deux applications $f,g : X \to Y$ sont **homotopes** s'il existe $H : X \times I \to Y$ t.q. $H|_{X\times\{0\}} = f$, $H|_{X\times\{1\}} = g$.

On appelle H une homotopie de f vers g.

Notation : $f \simeq g$



Prop 2.1 : La relation $\simeq$ est une rel. d'equiv. sur $\mathrm{Hom}(X,Y)$.

preuve : $f \simeq f$: $H(x,t) := f(x)$

Si $f \simeq g$ par H alors $g \simeq f$ par $G(x,t) = H(x,1-t)$.

Si $f \simeq g$ par G et $g \simeq h$ par H alors on obtient

$$X \times I \to Y$$
$$(x,t) \mapsto \begin{cases} H(x,2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,1-2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \text{de } f \text{ vers } h$$

$\square$

Notation : $\mathrm{Hom}(X,Y)/_{\simeq} =: [X,Y]$.

Exple : Soit $f : X \to Y$ et $c_y : \begin{matrix} X \to Y \\ x \mapsto y \end{matrix}$ l'appl. constante vers $y \in Y$.

Alors $c_y \simeq f \iff \exists H : X \times I \to Y$ t.q. $H(x,0) = y$

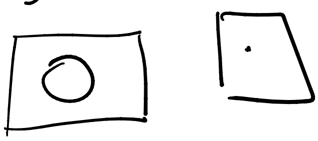
$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d] & Y \\ CX \arrow[ur, dotted, "F"'] & \end{tikzcd}$$

$\iff f$ s'étend à une app. $F : CX \to Y$

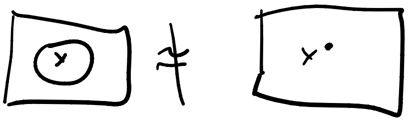
En part. si $X = S^1$, $f : S^1 \to Y$ est homotope à une app. constante

En part. si $X=S^1$, $f:S^1\to Y$ est homotope à une app. constante $\Leftrightarrow$ f s'étend à $D^2\to Y$

Expl: $S^1\hookrightarrow\mathbb{R}^2\simeq$



mais $S^1\hookrightarrow\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ $\not\simeq$



Def: Deux espaces X,Y ont le même type d'homotopie ou sont homotopes s'il existe des applications $f:X\to Y$ et $g:Y\to X$ t.q. $g\circ f\simeq id_X$ et $f\circ g\simeq id_Y$.

On appelle f et g des équivalences d'homotopie.

Notation: $X\simeq Y$

Def: X est contractile si $X\simeq pt$.

Lemme 2.2: Le cone CX est contractile pour tout esp. X.

preuve: On considère $f:CX\to pt$ et $g: pt\to CX$, $\bullet\mapsto[X\times\{0\}]$

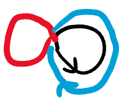
Alors $f\circ g=Id_{pt}$ et
$$H: CX\times I\to CX,\quad [x,t],s\mapsto[x,st]$$
est une homotopie de $g\circ f$ à Id_{CX} $\square$

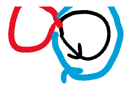
Exemple: $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\simeq S^1\simeq$ ruban de Moebius...

Rmk: Tous ces définitions ont un analogue pointé.

Si $f,g:(X,x_0)\to(Y,y_0)$, alors une homotopie pointée est une homot. H t.q. $H(x_0,t)=y_0$ $\forall t\in I$.

On écrit $[X,Y]_*=[(X,x_0),(Y,y_0)]_*$ pour l'ens. des classes d'homot. pointées.





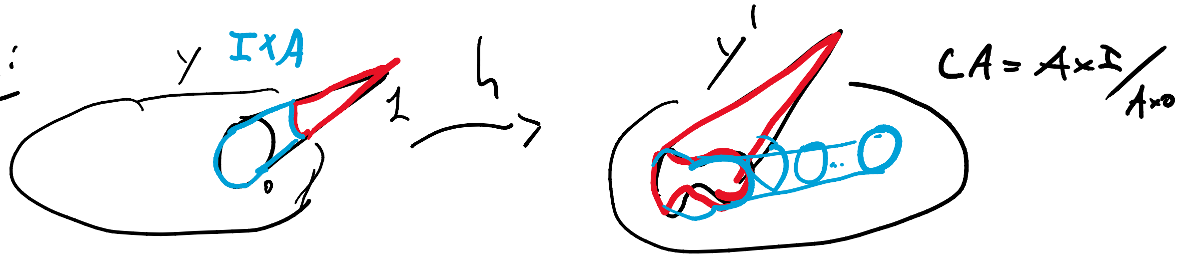
Exple : 

→ f est homotope à l'inclusion d'un cercle dans $S^1 \vee S^1$ autant qu'app. non-pointée, mais pas dans le sens pointée.

Quelques propriétés des homotopies :

Prop 2.3 : Si $f, f' : A \to X$ sont homotopes, alors $Y = X \cup_f CA$ et $Y' = X \cup_{f'} CA$ ont le même type d'homotopie.

pf :



Soit $H : A \times I \to X$ une homot. de f vers f'.

On définit $\tilde{h} : X \sqcup CA \to Y' = X \sqcup CA/\sim$ par

$$\tilde{h}_{|X} = id_X \quad \text{et} \quad \tilde{h}_{|CA}([a,t]) = \begin{cases} [a, 2t-1] & \frac{1}{2} \le t \le 1 \\ H(a, 2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\tilde{h}$ est bien-définie car pour $t = \frac{1}{2}$ on a $[a, 0] = H(a,1) = [f'(a)] \in Y'$

En plus $\forall a \in A$ $\tilde{h}(f(a)) = f(a) = H(a,0) = \tilde{h}([a,0])$, donc $\tilde{h}$ induit une appl. $h : Y \to Y'$.

On définit de la même manière $h' : Y' \to Y$ en utilisant $H(-, 1-t)$. Montrons $h' \circ h \simeq Id_Y$.

On a $h' \circ h_{|X} = Id_X$ et

$$h' \circ h_{|CA}[a,t] = \begin{cases} [a, 4t-3] & \frac{3}{4} \le t \le 1 \\ H(a, 3-4t) & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ H(a, 2t) & 0 \le t < \frac{1}{2} \end{cases}$$

On peut donc définir $G : Y \times I \to Y$ ...

$1-/t$ $\quad H(a,2t) \quad 0 \leq t < 1/2$

On peut donc définir $G : Y \times I \to Y$ par $G(x,t) = x \ \forall x \in X$, $t \in I$.

et
$$([a,t],s) \mapsto \begin{cases} \left[a, \frac{4}{4-3s}t - \frac{3s}{4-3s}\right] & \text{si } 3/4 \cdot s \leq t \leq 1 \\ H(a, 3s-4t) & 1/2\, s \leq t \leq 3/4\, s \\ H(a, 2t) & 0 \leq t \leq 1/2\, s \end{cases}$$

et on vérifie $G_{|Y \times \{1\}} = h' \circ h$ et $G_{|Y \times \{0\}} = \mathrm{Id}_Y$. $\square$

<u>Rmk</u>: Des espaces obtenu en recollant uniquement des S^n-cellules s'appelent CW-complexes. Ce n'est pas si facile de trouver des espaces non-homot. à un CW-complex.

On considère mtn une appl. $f : X \to Y$. Alors pour tout A on a une appl. induite $f_* : [A,X] \to [A,Y]$.
$$[u] \mapsto [f \circ u]$$

Si $u \simeq u'$ par H alors $f \circ u \simeq f \circ u'$ par $f \circ H$, donc f_* est bien-déf.

<u>Prop 2.4</u>: a) Si $f, g : X \to Y$ sont homot. alors
$$f_* = g_* : [A,X] \to [A,Y]$$

b) Si $X \simeq Y$ alors on a une bijection $[A,X] \cong [A,Y]$

<u>pf</u>: a) Soit $H : X \times I \to Y$ une homot. entre f et g.

Pour $[u] \in [A,X]$ on a que $H \circ (u \times \mathrm{Id}_I) : A \times I \to Y$ est une homot entre $f \circ u$ et $g \circ u$.

b) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ t.q. $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$, $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$.
Alors on a $f_* \circ g_*([u]) = [f \circ g \circ u] = (f \circ g)_*[u]$

Alors on a $f_* \circ g_*([u]) = [f \circ g \circ u] = (f \circ g)_*[u]$

Mais comme $f \circ g \simeq Id$ $(f \circ g)_* \overset{\text{a1}}{=} Id_{[A,Y]}$ et pareil $g_* \circ f_* = Id_{[A,X]}$ $\square$

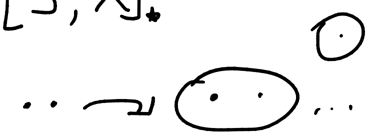
Rmk : La version pointée de 2.4 est aussi vrai.

2. Groupe fondamental

Def : Soient $(A, a_0), (X, x_0)$ deux espaces pointés. On note $[A,X]_*$ l'ensemble des classes d'homotopie pointées d'appl pointées $f : A \to X$ (t.q. $f(a_0) = x_0$).

• Pour chaque $n \geq 0$ on note $\pi_n(X, x_0) = [S^n, X]_*$

Avant de donner des noms aux π_n, voyons π_0 :



Prop 2.5 : $\pi_0(X, x_0) = X/\sim$ où $x \sim y \iff \exists f : I \to X$ t.q. $f(0) = x$, $f(1) = y$.

Rmk : $\pi_0(X) = \pi_0(X, x_0)$ est donc l'ensemble des composantes connexes (par arcs) de X. Ce n'est pas un groupe !

preuve : On définie $\phi : \pi_0(X, x_0) \longrightarrow X/\sim$

$$[S^0, X]_* \to X/\sim \quad , \quad S^0 = \{\pm 1\}$$
$$f \mapsto f(-1)$$

Si $f \simeq g$, alors $\exists H : S^0 \times I \to X$ un homot. et $H(-1, -) : I \to X$ est un chemin de $f(-1)$ à $g(-1)$. Donc ϕ est bien-déf.

ϕ est surj : Pour $[x] \in X/\sim$ on peut définir f par $f(1) = x_0$, $f(-1) = x$.

ϕ est inj : On a $\phi(f) = \phi(g) \iff f(-1)$ et $g(-1)$ sont connecté par un $\gamma : I \to X$

On définie alors une homot. pointée $H : S^0 \times I \to X$ par $H(1, t) = x_0$ $\forall t$, $H(-1, t) = \gamma(t)$. $\Rightarrow [f] = [g] \in \pi_0(X)$ $\square$

Tous les autres $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$, admettent une structure de groupe et on les appelle les groupes d'homotopies. Le $\pi_1(X, x_0)$

Tous les autres $\pi_n(X,x_0)$, $n\geq 1$, admettent une structure de groupe naturelle. On les appelle les groupes d'homotopies. Le $\pi_1(X,x_0)$ s'appelle le groupe fondamental.

Def: Pour $f,g : I \to X$ avec $f(1)=g(0)$ on note $f*g : I \to X$ la concaténation définie par $f*g(t)=\begin{cases} f(2t) & 0\leq t\leq 1/2 \\ g(2t-1) & 1/2\leq t\leq 1\end{cases}$

• Pour $f : I\to X$ on définie $f^{-1} : I\to X$ par $f^{-1}(t)=f(1-t)$.

Lemme 2.6: $f*f^{-1}\simeq c_{f(0)}$ et $f^{-1}*f \simeq c_{f(1)}$

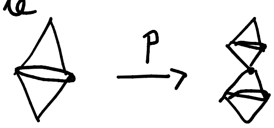
preuve:

• On a $H : I\times I \to X$
$$H(t,s)=\begin{cases} f(2st) & 0\leq t\leq 1/2 \\ f(s(2-2t)) & 1/2\leq t\leq 1\end{cases}$$
est une homot. entre $c_{f(0)}$ et $f*f^{-1}$ □

Def: Le produit sur $\pi_1(X,x_0)$ est définie par
$$[\alpha]\cdot[\beta] := [\alpha * \beta]$$
en utilisant $S^1=[0,1]/0\sim 1$.

Une manière plus élegante de voir ce produit:

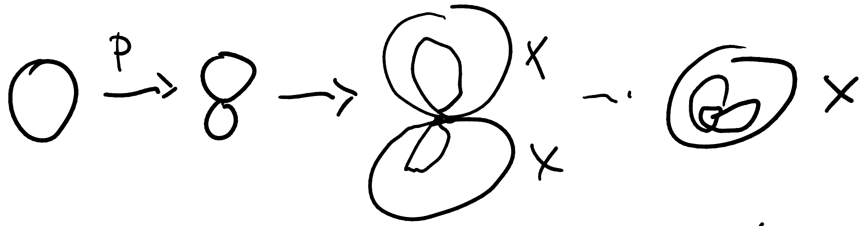
Def: Soit ΣA la suspension d'un espace A. Le pinch est le quotient $p : \Sigma A \to \Sigma A/A\times\{1/2\} \simeq \Sigma A\vee \Sigma A$



• Pour un espace pointé (X,x_0), le pliage (fold) est l'appl.
$$X\vee X = X\sqcup X/_{x_0\sim x_0} \to X$$
donnée par l'identité sur chaque copie de X.

Comme $S^n = \Sigma S^{n-1}$ pour $n\geq 1$ (Exercise?), on peut donc définir un produit peut donc définir un produit

$$\cdot : \pi_n(X,x_0) \times \pi_n(X,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,x_0)$$
$$\alpha : S^n \to X \quad \beta : S^n \to X \longmapsto S^n \xrightarrow{p} S^n \vee S^n \xrightarrow{\alpha \vee \beta} X \vee X \xrightarrow{\nabla} X$$



Si $\alpha \simeq \alpha'$ et $\beta \simeq \beta'$ alors $\alpha \vee \beta \simeq \alpha' \vee \beta'$ en faisant les deux homot. en même temps, donc $\cdot$ est bien déf.

· <u>Ex</u> : Pour $n=1$ les deux opérations sont les mêmes

<u>Prop. 2.7</u> : $\cdot : \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ définie une structure de groupe où l'inverse de $\alpha : [0,1]/_{0\sim 1} \to X$ est $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ et $c_{x_0} : S^1 \to \{x_0\} \subset X$ l'élém. neutre.

<u>pf</u> : Clairement $\alpha \cdot c_{x_0} = c_{x_0} \cdot \alpha = \alpha$

En plus par 2.6 on a $\alpha \cdot \alpha^{-1} \simeq c_{x_0} = \alpha^{-1} \cdot \alpha$.

· <u>Assoc</u> : Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \pi_1(X,x_0)$. Il suffit de montrer que

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"] & S^1 \vee S^1 \arrow[d, "\mathrm{Id} \vee p"] & \\ S^1 \vee S^1 \arrow[r, "p \vee \mathrm{Id}"] & S^1 \vee S^1 \vee S^1 \arrow[r, "\alpha \vee \beta \vee \gamma"] & X \end{tikzcd}$$

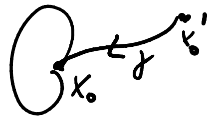
$(\mathrm{id} \vee p) \circ p \simeq (p \vee \mathrm{id}) \circ p$

(Exercice)

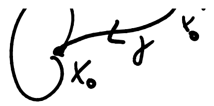
$\square$

<u>Rmk</u> : Si x_0' est dans la même composante connexe que x_0, connecté par $\gamma : I \to X$ alors $\pi_1(X,x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X,x_0')$ est un isom. de groupes.

$$[\alpha] \longmapsto [\gamma^{-1} * x_0 * \gamma]$$



$$[\alpha] \longmapsto [\gamma^{-1} * x_0 * \gamma]$$



car $\gamma \cdot \gamma^{-1} \simeq c_x$

C'est pour ça qu'on va souvent écrire $\pi_1(X)$ pour $\pi_1(X, x_0)$

<u>Cor 2.8</u> : a) Chaque appl. $f: X \to Y$ induit un homom.

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

En part. si $X \simeq Y$ alors $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

b) Pour deux espaces X, Y on a $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$

<u>pf</u>: a) On a déjà vu que f induit une application

$$f_*: \pi_1(X) \to \pi_1(Y), \quad [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$$

Comme $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$

f_* est un homom. de groupes.

b) Par a), les projections $p_Y: X \times Y \to Y$, $p_X: X \times Y \to X$ induisent un homom. $g: \pi_1(X \times Y) \to \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$

Inversement, étant donné $\alpha: S^1 \to X$, $\beta: S^1 \to Y$ on définit

$$\alpha \times \beta : S^1 \xrightarrow{\Delta} S^1 \times S^1 \xrightarrow{\alpha \times \beta} X \times Y.$$

Si $\alpha \simeq \alpha'$ et $\beta \simeq \beta'$ alors $\alpha \times \beta \simeq \alpha' \times \beta'$ et on obtient donc un homom. $f: \pi_1(X) \times \pi_1(Y) \to \pi_1(X \times Y)$.

Pour $\alpha: S^1 \to X \times Y$ on a $f \cdot g([\alpha]) = f([p_X \circ \alpha], [p_Y \circ \alpha]) = \left[\begin{matrix} S^1 \xrightarrow{\Delta} S^1 \times S^1 \xrightarrow{p_X \circ \alpha,\, p_Y \circ \alpha} X \times Y \\ t \mapsto t, t \longrightarrow \alpha(t) \end{matrix} \right]$

$$= [\alpha].$$

Et pour $\alpha: S^1 \to X$, $\beta: S^1 \to Y$

$$g \cdot f([\alpha], [\beta]) = g([S^1 \xrightarrow{\Delta} S^1 \times S^1 \xrightarrow{\alpha \times \beta} X \times Y]) = ([\alpha], [\beta]) \quad \square$$

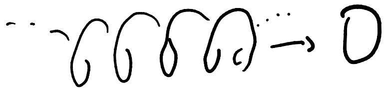
$$g\cdot f([\alpha],[\beta]) = g([S^1 \xrightarrow{\Delta} S^1\times S^1 \xrightarrow{\alpha\times\beta} X\times Y]) = ([\alpha],[\beta]) \qquad \square$$

<u>Def</u>: Un espace X est <u>simplement connexe</u> si $\pi_0(X)=\pi_1(X)\cong\{pt\}$,

<u>Cor 2.9</u>: Dans un espace simpl. conn. il $\exists!$ classe d'homot. entre deux point

<u>Pf</u>: $\forall x,y\in X$ $\exists f: I\to X$ avec $f(0)=x$, $f(1)=y$ car $\pi_0(X)=\{pt\}$.
Si $g: I\to X$ est un autre, alors $f = \underbrace{f\cdot \bar{g}}_{\in \pi_0(X,x_0)=\{pt\}}\cdot g \simeq g$ $\square$

<u>Thm 2.10</u>: $\pi_1(S^1,1)$ est engendré librement par $\omega(t)=e^{2\pi i t}$. En part $\pi_1(S^1)\cong\mathbb{Z}$.



Pour la preuve on va utiliser l'application $p:\mathbb{R}\to S^1$, $t\mapsto e^{2\pi i t}$

<u>Def</u>: Un <u>revêtement</u> d'un espace X est une appl. $p:\tilde{X}\to X$ t.q. $\forall x\in X$ $\exists$ voisinage $x\in U\subset X$ t.q. $p^{-1}(U)=\bigsqcup_{i\in I} U_i$ avec $I\neq\emptyset$ et $p_{|U_i}: U_i\to U$ est un homeom.

- Un ouvert $U\subset X$ t.q. $p^{-1}(U)=\bigsqcup_{i\in I} U_i$ et $p_{|U_i}$ est un homeo. s'appelle <u>adapté</u> (à p).

Pour la preuve de 2.9 on a besoin de deux prop. d'un revêtement $p:\tilde{X}\to X$:

a) $\forall f: I\to X$ avec $f(0)=x_0$ et $\forall \tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ $\exists!\ \tilde{f}: I\to\tilde{X}$ t.q. $\tilde{f}(0)=\tilde{x}_0$ et $f=p\circ\tilde{f}$

t.q. $\tilde{f}(0)=\tilde{x}_0$ et $f=p\circ\tilde{f}$

b) $\forall$ homotopies H entre $f,g: I\to X$ avec $f(0)=g(0)=x_0$ et $\forall \tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ $\exists!$ $\tilde{H}$ entre $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ t.q. $H=p\circ\tilde{H}$.

<u>pf de 2.10:</u> On remarque d'abord que $[\omega]^n=[\omega_n]$ où $\omega_n(t)=e^{2\pi i n\cdot t}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Il suffit donc de montrer que $\forall \alpha: \underset{[0,1]/\{0\}\sim\{1\}}{S^1}\to S^1$ $\exists!$ ω_n t.q. $\alpha\simeq\omega_n$.

<u>Existence</u>: Soit $\tilde{\alpha}: I\to\mathbb{R}$ le revêtement de α de (a) t.q. $\tilde{\alpha}(0)=0\in\mathbb{R}$.

Comme $p^{-1}(1)=\mathbb{Z}$ on a que $\tilde{\alpha}(1)=n$ pour un certain n.

Comme $\mathbb{R}$ est contractile $\pi_1(\mathbb{R})\simeq\pi_1(pt)=\{1\}$.

On a que $\tilde{\omega}_n(t):=n\cdot t$ connecte également 0 et n et donc par 2.9. $\tilde{\alpha}\simeq\tilde{\omega}_n \Rightarrow \alpha=p\circ\tilde{\alpha}\simeq p\circ\tilde{\omega}_n=\omega_n$

<u>Unicité</u>: Si $\alpha\simeq\omega_n$ et $\alpha\simeq\omega_m$ alors $\omega_n=\omega_m$

Soit $H: I\times I\to S^1$ une homot. t.q. $H(t,0)=\omega_n$, $H(t,1)=\omega_m$. Par (b) $\exists!$ $\tilde{H}: I\times I\to\mathbb{R}$ homot. entre $\tilde{\omega}_n$ et $\tilde{\omega}_m$.

Comme H est une homot. pointée, $H(0,s)=H(1,s)=1$. $\forall s\in I$.

$\Rightarrow \tilde{H}(1,s)\in p^{-1}(1)=\mathbb{Z}$. Comme $\tilde{H}$ est continue $\tilde{H}(1,s)$ est constant

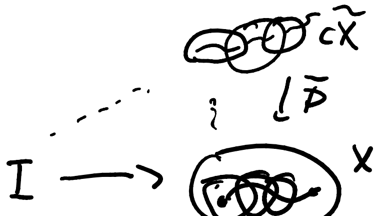
$n=\tilde{H}(1,0)=\tilde{H}(1,1)=m$ □

Pour démontrer (a) et (b) on montre plus généralement

<u>Prop 2.11</u>: Soit $F: Y\times I\to X$ et $\tilde{F}: Y\times\{0\}\to\tilde{X}$ t.q. $p\circ\tilde{F}=F|_{Y\times\{0\}}$. Alors $\exists!$ $\tilde{\tilde{F}}: Y\times I\to\tilde{X}$ t.q. $p\circ\tilde{\tilde{F}}=F$ (et $\tilde{\tilde{F}}|_{Y\times\{0\}}=\tilde{F}$).

$p\circ\tilde{F} = F|_{Y\times\{0\}}$. Alors $\exists!\ \tilde{F}: Y\times I \to \tilde{X}$ t.q. $p\circ\tilde{F} = F$ (et $\tilde{F}|_{Y\times\{0\}} = \tilde{F}$).

Rmk: Si $Y=\{pt\}$ on obtient (a). Pour (b), étant donné $H: I\times I\to X$ et $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ on applique (a) pour obtenir $\tilde{f}: I\times\{0\}\to\tilde{X}$  et puis 2.11 pour obtenir $\tilde{H}: I\times I\to\tilde{X}$. Par l'unicité de (a), $\tilde{H}(t,1) = \tilde{\gamma}(t)$



pf de 2.11: On va d'abord construire $\tilde{F}: N\times I\to\tilde{X}$ pour N un voisinage d'un $y_0\in Y$.

Comme F est continue, chaque $(y_0,t)\in Y\times I$ admet un vois. $N_t\times(a_t,b_t)$ t.q. $F(N_t\times(a_t,b_t))\subset U\ni F(y_0,t)$ et U est adapté. Comme $\{y_0\}\times I$ est cpct, un nombre fini des $N_t\times(a_t,b_t)$ recouvrent $\{y_0\}\times I$.

$\Rightarrow \exists N\ni y_0$ vois. et $0=t_0<t_1<\dots<t_m=1$ t.q. $F(N\times[t_i,t_{i+1}])\subset U_i$ avec U_i un ouvert adapté.

Par hypothèse on a un rel. $\tilde{F}: N\times\{0\}\to\tilde{X}$. Supposons donc par induction qu'on a $\tilde{F}: N\times[0,t_i]\to\tilde{X}$. Comme $F(N\times[t_i,t_{i+1}])\subset U_i$ adapté $\exists\ \tilde{U}_i\subset\tilde{X}$ t.q. $p|_{\tilde{U}_i}$ est un homeo et $\tilde{F}(y_0,t_i)\in\tilde{U}_i$. En remplaçant $N\times\{t_i\}$ par $N\times\{t_i\}\cap\tilde{F}^{-1}(\tilde{U}_i)$ on peut supp. que $\tilde{F}(N\times\{t_i\})\subset\tilde{U}_i$.

On peut alors définir $\tilde{F}: N\times[0,t_{i+1}]\to\tilde{X}$

$$n,t\longmapsto\begin{cases}\tilde{F}(n,t) & t\in[0,t_i]\\ (p|_{\tilde{U}_i})^{-1}\circ F(n,t) & t\in[t_i,t_{i+1}]\end{cases}$$

Induction $\Rightarrow$ $\tilde{F}: \overset{\overset{y_0}{\cap}}{N}\times I\to\tilde{X}$

Unicité pour $Y=\{pt\}$: Supposons $\tilde{F}$ et $\tilde{F}'$ sont des rel. de $F: I\to X$ t.q. $\tilde{F}(0)=\tilde{F}'(0)$. Alors $\exists\ 0=t_0<t_1<\dots<t_m=1$ t.q. $F([t_i,t_{i+1}])\subset U_i$

t.q. $\tilde{F}(0) = \tilde{F}'(0)$. Alors $\exists\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ t.q. $H([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ adapté. Supp. que $\tilde{F}_{|[0,t_i]} = \tilde{F}'_{|[0,t_i]}$.

Comme $[t_i, t_{i+1}]$ est convexe, $\tilde{F}([t_i, t_{i+1}]) \subset \tilde{U}_i$ pour un unique $\tilde{U}_i \subset p^{-1}(U_i)$ et pareil pour $\tilde{F}'$. Mais $\tilde{F}(t_i) = \tilde{F}'(t_i) \Rightarrow \tilde{F}'([t_i, t_{i+1}]) \subset \tilde{U}_i$. Mais $p_{|\tilde{U}_i}$ est injective et $p_{|\tilde{U}_i} \circ \tilde{F}_{|[t_i,t_{i+1}]} = p_{|\tilde{U}_i} \circ \tilde{F}'_{|[t_i,t_{i+1}]} \Rightarrow \tilde{F} = \tilde{F}'$ sur $[t_i, t_{i+1}]$ ✓

Pour finir on recouvre $Y \times I$ par des $N \times I$ et considère $\tilde{F}_N : N \times I \to \tilde{X}$.
Par l'unicité $\tilde{F}_N(x,t) = \tilde{F}_{N'}(x,t)\ \forall (x,t) \in (N \cap N') \times I \Rightarrow \exists\ \tilde{F} : Y \times I \to \tilde{X}$ continue qui est unique car il l'est sur $\{y\} \times I\ \forall y \in Y$. $\square$